Задача 1.

Решение:

Если в турнире участвовало:

16 спортсменов, то число встреч ≤ 120

15 спортсменов, то число встреч ≤ 105

14 спортсменов, то число встреч ≤ 91

Следовательно, играли 15 или 16 спортсменов.

В первом случае 13 спортсменов провели между собой (13·12)/2=78 встреч. Но тогда выбывшие вместе сыграли 16 встреч, то есть кто-то провел больше половины возможных партий.

Во втором случае 14 спортсменов провели (14·13)/2=91 встречу.

Следовательно, выбывшие спортсмены провели 3 игры.

Ответ: 16

Задача 2.

Решение:

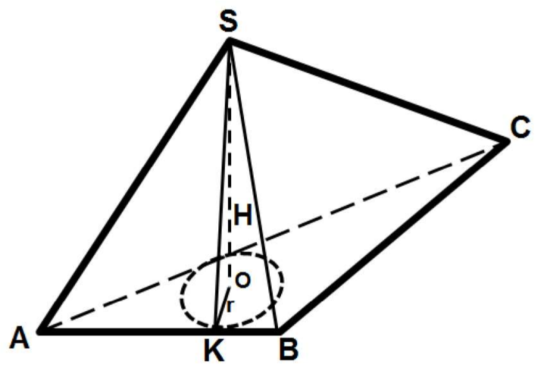
AB=10, AC=21, BC=17, $\angle SKO = \alpha$

$s_{ABC} = \sqrt{24 \cdot 7 \cdot 14 \cdot 3} = 7 \cdot 12 = 84$

$r = \frac{S_{ABC}}{P} = \frac{84}{24} = \frac{7}{2}$

$\frac{H}{r} = tg\alpha \Longrightarrow H = \frac{7}{2} tg\alpha$

$V = \frac{1}{3} S_{\text{осн}} \cdot H = \frac{1}{3} \cdot 84 \cdot \frac{7}{2} tg\alpha = 98 tg\alpha$



Ответ:

$V = 98tg\alpha$

Задача 3.

Решение:

$x^{12} - x^9 + x^8 - x^5 + x^2 - x + 1 = 0$

$f(x) = x^{12} - x^9 + x^8 - x^5 + x^2 - x + 1$

1) $x \leq 0 \Rightarrow f(x) > 0;$

2) $x \in (0, 1), \quad x^{12} + (x^8 - x^9) + (x^2 - x^5) + (1 - x) > 0;$

3) $x = 1,\ f(x) = 1$

4) $x > 1, (x^{12} - x^9) + (x^8 - x^5) + (x^2 - x) + 1 > 1$

Ответ: нет корней.

Задача 4.

Решение:

$$\begin{cases} |x+5|(2-y) = 11+2y, \\ 2|x+5|y+3|x+5| = 6+3y \end{cases}$$

$t = |x+5| \geq 0$

$$\begin{cases} t(2-y) = 11+2y, \\ 2ty+3t = 6+3y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -ty+2t = 11+2y, \\ 2ty+3t = 6+3y \end{cases}$$

$$\begin{cases} -2ty+4t = 22+4y, \\ 2ty+3t = 6+3y \end{cases}$$

$$\begin{cases} 7t = 28+7y, \\ t(2-y) = 11+2y \end{cases}$$

$$\begin{cases} t = y+4, \\ (y+4)(2-y) = 11+2y \end{cases}$$

$$\begin{cases} t = y+4, \\ y^2+4y+3 = 0 \end{cases}$$

$y_1 = -1;$	$y_2 = -3;$
$t_1 = 3$	$t_2 = 1$
$\lvert x+5\rvert = 3$	$\lvert x+5\rvert = 1$
$x_1 = -8$	$x_3 = -4$
$x_2 = -2$	$x_4 = -6$

Ответ: (-8;-1), (-2;-1), (-4;-3), (-6;-3).

Задача 5.

Решение:

Составим систему логических уравнений

$$\begin{cases} \text{С}_2\overline{\text{И}}_3 + \overline{\text{С}}_2\text{И}_3 = 1 \\ \text{С}_1\overline{\text{М}}_2 + \overline{\text{С}}_1\text{М}_2 = 1 \\ \text{К}_2\overline{\text{И}}_4 + \overline{\text{К}}_2\text{И}_4 = 1 \end{cases}$$

Умножаем 1-ое на 2-ое уравнение

$$\text{С}_1\text{С}_2\overline{\text{М}}_2\overline{\text{И}}_3 + \text{С}_1\overline{\text{М}}_2\overline{\text{С}}_2\text{И}_3 + \text{С}_2\overline{\text{С}}_1\overline{\text{И}}_3\text{М}_2 + \overline{\text{С}}_1\overline{\text{С}}_2\text{М}_2\text{И}_3 = 1$$

Сокращаем и получаем систему уравнений

$$\begin{cases} \text{С}_1\overline{\text{М}}_2\overline{\text{С}}_2\text{И}_3 + \overline{\text{С}}_1\overline{\text{С}}_2\text{М}_2\text{И}_3 = 1 \\ \text{К}_2\overline{\text{И}}_4 + \overline{\text{К}}_2\text{И}_4 = 1 \end{cases}$$

Умножаем полученное уравнение на 3-е

$$\text{С}_1\overline{\text{М}}_2\overline{\text{С}}_2\text{И}_3\text{К}_2\overline{\text{И}}_4 + \overline{\text{С}}_1\overline{\text{С}}_2\text{М}_2\text{И}_3\text{К}_2\overline{\text{И}}_4 + \text{С}_1\overline{\text{М}}_2\overline{\text{С}}_2\text{И}_3\overline{\text{К}}_2\text{И}_4 + \overline{\text{С}}_1\overline{\text{С}}_2\text{М}_2\text{И}_3\overline{\text{К}}_2\text{И}_4 = 1$$

$$\text{С}_1\overline{\text{М}}_2\overline{\text{С}}_2\text{И}_3\text{К}_2\overline{\text{И}}_4 = 1$$

Ответ:

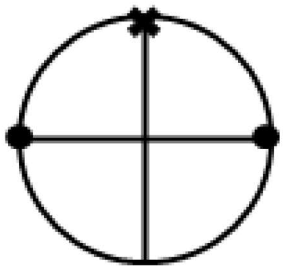
Слава – 1, Коля – 2, Игорь – 3, Миша – 4

Задача 6.

Решение:

$\sin^{2021} x + \cos^{2022} x = 1$

$\sin^2 x\,(1 - \sin^{2019} x) + \cos^2 x\,(1 - \cos^{2020} x) = 0$



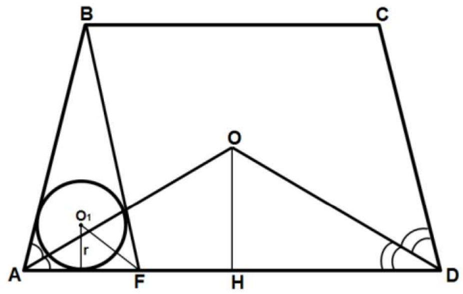
$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} \sin^2 x = 0 \\ \cos^2 x = 0 \end{cases} \Rightarrow \emptyset \\ \begin{cases} \sin^{2019} x = 1 \\ \cos^{2020} x = 1 \end{cases} \Rightarrow \emptyset \\ \begin{cases} \sin^2 x = 0 \\ \cos^{2020} x = 1 \end{cases} \\ \begin{cases} \cos^2 x = 0 \\ \sin^{2019} x = 1 \end{cases} \end{array}\right.$$

Ответ: $\boldsymbol{x_1 = \pi n, \quad n \in Z}$

$\boldsymbol{x_2 = \frac{\pi}{2} + 2\pi k, \quad k \in Z}$

Задача 7.

Решение:



AD=28, AB=10, BC=10, CD=12.

BF||CD, OH⊥AD.

$S_{ABF} = \sqrt{20 \cdot 10 \cdot 8 \cdot 2} = 40\sqrt{2} \Longrightarrow \Delta AOD \sim \Delta AO_1F$

$S_{AOD} = K^2 S_{AO_1F}$

$K = \frac{AD}{AF} = \frac{28}{18} = \frac{14}{9}$

$r \cdot P = S_{ABF} \Longrightarrow r = \frac{40\sqrt{2}}{20} = 2\sqrt{2}$

$S_{AO_1F} = \frac{1}{2} AF \cdot r = \frac{1}{2} \cdot 18 \cdot 2\sqrt{2} = 18\sqrt{2} \Longrightarrow S_{AOD} = 18\sqrt{2} \cdot \left(\frac{14}{9}\right)^2 = \frac{392\sqrt{2}}{9}$

Ответ: $\boldsymbol{S_{AOD} = \frac{392\sqrt{2}}{9}}$

Задача 8.

Решение:

$(4 + 2\log_3 x)\log_x 3 \log_{9x} 3 > 1$

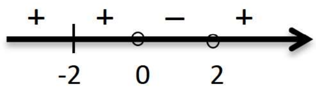
$\frac{4 + 2\log_3 x}{\log_x 3\,(\log_3 9x)} > 1, \qquad t = \log_3 x$

$\frac{4 + 2t}{t(2 + t)} > 1, \qquad \frac{4 + 2t - 2t - t^2}{t(2 + t)} > 0, \qquad \frac{t^2 - 4}{t(t + 2)} < 0$

$0 < t < 2$

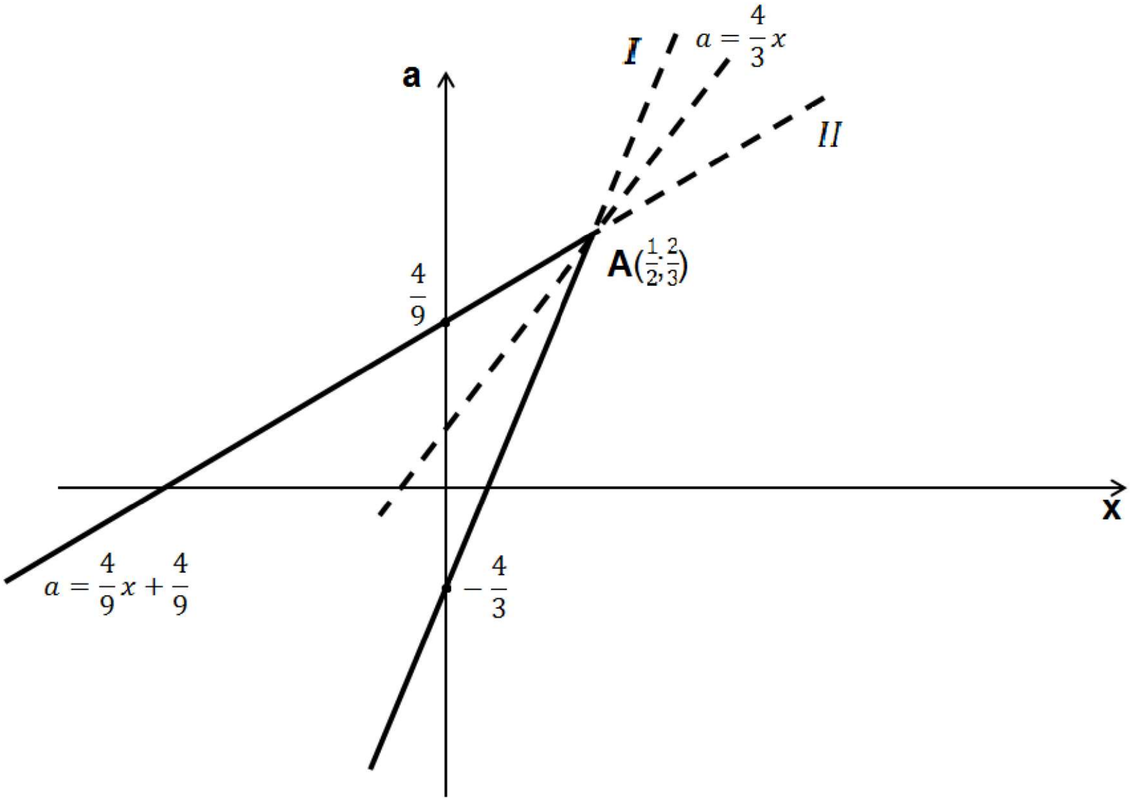
$0 < \log_3 x < 2,$

$x \in (1; 9)$



Ответ: $x \in (1; 9)$

Задача 9.



$1.\ 2(3a - 4x) + 3a - 4 + 4x = 0$

$9a - 4x - 4 = 0$

$a = \frac{4}{9}x + \frac{4}{9}$

$2.\ -2(3a - 4x) + 3a - 4 + 4x = 0$

$-3a + 12x - 4 = 0$

$a = 4x - \frac{4}{3}$

A - ?

$$\begin{cases} a = \frac{4}{9}x + \frac{4}{9} \\ a = \frac{4}{3}x \end{cases}$$

A $(\frac{1}{2}; \frac{2}{3})$

Ответ: $\boldsymbol{a} \in (-\infty; \frac{4}{9})$

Задача 10.

Решение:

Есть в первой урне x белых шаров $\Longrightarrow$(20-x) черных шаров.

Есть во второй урне 20λ всего шаров, t белых шаров $\Longrightarrow$($20\ \lambda$-t) – черных шаров.

$$(20-\mathrm{x})(20\lambda-t)=\mathrm{x}t$$

$$20^2\lambda-20\lambda\mathrm{x}-20t+\mathrm{x}t=\mathrm{x}t$$

$$20(20\lambda-\lambda\mathrm{x}-t)=0\Longrightarrow t=20\lambda-\lambda\mathrm{x}$$

λx - черных шаров во второй урне

$20\lambda-\lambda\mathrm{x}$ - белых шаров во второй урне

$$2\left(\frac{\mathrm{x}}{2}+\frac{20\lambda-\lambda\mathrm{x}}{3}\right)=(\frac{20-\mathrm{x}}{2}+\frac{\lambda\mathrm{x}}{3}$$

$$2\left(\frac{3\mathrm{x}+40\lambda-2\lambda\mathrm{x}}{6}\right)=\frac{60-3\mathrm{x}+2\lambda\mathrm{x}}{6}$$

$$\lambda=\frac{60-9\mathrm{x}}{80-6\mathrm{x}}$$

$$\mathrm{x}\in\{2;4;6;8;10;12;14;16;18\}$$

$\lambda>0;\ \lambda\mathrm{x}$ – целое $\Longrightarrow$

а) x=14 $\Longrightarrow\lambda=\frac{33}{2}$

б) x=16 $\Longrightarrow\lambda=\frac{21}{4}$

1.

№ урны	Б.ш.	Ч.ш.
I урна	14	6
II урна	99	231
III урна	40	80

2.

№ урны	Б.ш.	Ч.ш.
I урна	16	4
II урна	21	84
III урна	15	30

Ответ: в третьей урне а) б.ш. – 40; ч.ш. – 80.
б) б.ш. – 15; ч.ш. – 30.